

○ 波動性と粒子性

光（電磁波）は波動性と粒子性の性質をあわせ持つ事実が発見されました（二重性）。1923年にルイ・ド・ブロイは物質を作る粒子も、同じく二重性、つまり波動性も持つと预言しました。この波を（ **物質波** ）といいます（とくに電子の物質



波を（ **電子波** ）といいます）。物質波 λ は、光子の運動量 $p = \frac{h}{\lambda}$ と、物体の運動量

$P=mv$ より、

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

と表されます。この波長 λ をド・ブロイ波長といいます。1927年にデイヴィソンとジャーマーは、結晶に電子をあてる実験を行い、電子の回折・干渉現象を得ました。X線と同じように波長を求めると、それがド・ブロイの予想どおりになることを確かめました（トムソンや菊池正史なども）。

消しゴムは、輪郭が波打っているようには見えません。物質波の波長について、実際に数値計算してみましょう。たとえば、1 kgの物質（牛乳1本の質量）が1 m/sの速さで運動しているときの物質波の波長を求めてみると、

$$\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{1 \times 1} = 6.63 \times 10^{-34} [m]$$

となります。このオーダーは小さすぎて、人間が波と覚えることは無いでしょう。では、電子の場合、物質波（電子波）はくらいになるのでしょうか。速さ $1.0 \times 10^5 \text{ m/s}$ で動く電子の、物質波（電子波）の波長 λ は何 m になるか計算してみましょう。なお電子の質量を $9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ です。

$$\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 1.0 \times 10^5} = 7.3 \times 10^{-9} [m]$$

これは観測できるような数値です。

参考 粒子の波動性とはどういう意味なのか？



<https://youtu.be/-EYmgL8kD2g>

極めて小さな粒子は、粒子としての性質だけではなく、波の性質も持ち合わせていますが、粒子の波動性とはどう解釈すればよいのでしょうか。例えば電子（物質）をスリットに通すと、（ **干渉縞** ）が生じます。

なお不思議なことに電子を1粒、1粒にして、スリットに何度も繰り返して通すと、縞模様が現れてきます。どう考えればよいのでしょうか。なお、現在では粒子の波動性とは、(**粒子の存在する確率をあらわす波**) として説明されています。



○ 量子力学と不確定性原理

粒子性と波動性の二重性を扱う理論形式は、(**量子**) 力学と呼ばれています(対して今までの物理を古典力学(ニュートン力学)と呼びます)。量子力学では「位置と運動量を同時に正確に決めることはできない」と言われ、これをハイゼンベルクの不確定性原理といいます。

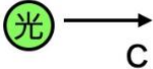
参考 天才科学者の混乱した発言の数々

・「真に理解している者はひとりもないにもかかわらず、使い方だけはわかっているという、謎めいて混乱した学問領域である」(マレー・ゲルマン)

・「量子論にはじめて出会った時にショックを受けない者に、量子論を理解できたはずがない」(ニールス・ボーア)

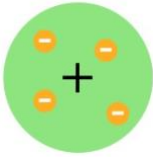
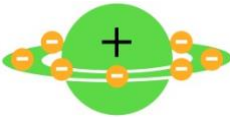
・「「こんなことがあっていいのか？」と考え続けるのはやめなさいーやめられるのならば。その問いへの答えは、誰も知らないのだから」(リチャード・ファインマン) 『量子論革命』(新潮社) より

まとめ 物質(電子)の波動性と粒子性

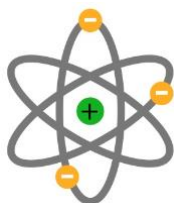
	波動性	粒子性
光	古典物理学 光は波である。  波の式 $v = f \lambda$ ↓ 光の場合 $c = v \lambda$	新発見 光は粒子の性質も持つ  エネルギー $E = (h v)$ 運動量 $P = \frac{E}{c} = \left(\frac{h v}{c} \right) = \left(\frac{h}{\lambda} \right)$
物質(電子など)	新発見 電子は波の性質を持つ  $\text{物質波 } \lambda = \left(\frac{h}{m v} \right)$	古典物理 電子は粒子である  運動エネルギー: $E = \frac{1}{2} m v^2$ 運動量: $P = m v$

○ 原子核の発見

原子は電氣的に中性ですが、トムソンが発見した電子は（ 負 ）の電荷を持っていたため、原子の中にはこの負の電荷を打ち消す正の電荷をもつものがあると考えられました。原子の構造には2つの仮説がありました。

（ ぶどうパン ）モデル	（ 土星型 ）モデル
  JJ トムソン +の電荷の中に電子が埋まっている	  長岡半太郎 +の電荷のまわりを電子が回っている

1909 年、ラザフォードの研究室のガイガーとマースデンは、金ぱくに高速で飛び出すヘリウムの原子核（ α 粒子という）をぶつけてみたところ、この粒子の反射の様子から、ラザフォードは原子の中心には正に帯電した小さい核（ 原子核 ）があり、電子がその周りをまわっているというモデルを考案しました。長岡半太郎の原子模型と似ていますが、核が小さいという点で異なります。



ラザフォードは原子核半径の上限は約 $10^{-14}m$ であり、電子はそのまわりを原子のサイズである $10^{-10}m$ の半径で回っていると考えました。仮に卓球のボール（半径 2cm）を原子核とすると、電子はその 10^4 倍、20000cm=200m 離れたところを電子が回っていることになります。原子は驚くべきことに、ほとんどスカスカの構造です。



GoogleMapで右クリック 距離を測る

・ ラザフォードの原子核の問題点

問題点1 なぜ電子が原子核に落ちてしまわないのか

電磁気学によれば、回転する電子は（ 電磁波 ）を放出し続けてエネルギーを失います。すると速度も遅くなるので、円運動の半径が小さくなっていき、原子核に落ちてしまいがちですが、実際の原子はそ

のようなことが起こりません。

問題点 2 なぜプラス原子が中心に固まっていられるのだろうか？

静電気力により集まることができそうもありますが、なぜか固まっているようです。

・水素原子のスペクトル

ここで水素原子の構造と関係のある「別のお話」です。水素を熱すると（エネルギーを与える）、水素原子から以下の $\lambda_1 \sim \lambda_4$ のような固有な線スペクトルを持つ光が観測できます。

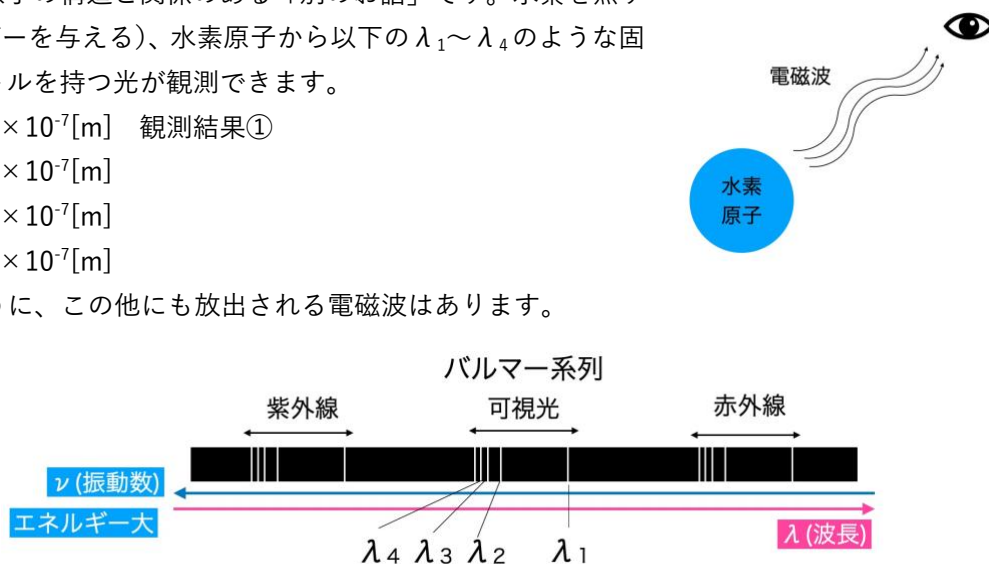
$\lambda_1 = 6.5628 \times 10^{-7} [\text{m}]$ 観測結果①

$\lambda_2 = 4.8163 \times 10^{-7} [\text{m}]$

$\lambda_3 = 4.3405 \times 10^{-7} [\text{m}]$

$\lambda_4 = 4.1017 \times 10^{-7} [\text{m}]$

下の図のように、この他にも放出される電磁波はあります。



λ_1 と λ_2 の「間の波長を持つ光」は観測できません。これについて、1884年にスイスの高校数学教師であったバルマーが $\lambda_1 \sim \lambda_4$ の数値の規則性を発見して、数式化しました。



$$\lambda_{n-2} = 3.65 \times 10^7 \times \frac{n^2}{n^2 - 2^2} \quad \text{なお } n = 3, 4, 5, 6$$

例えば λ_1 は $n=3$ を入れると求められます。電卓で計算してみましょう。

$$\lambda_1 = 3.65 \times 10^7 \times \frac{9}{9 - 4} = 6.57 \times 10^7 [\text{m}]$$

観測結果①と近い数字になりました。この可視光領域の光の系列（まとめ）を（ **バルマー系列** ）といいます。さらに可視光よりも波長の短い領域で（ **ライマン系列** ）、可視光よりお波長の長い領域で（ **パッシェン系列** ）という線スペクトルが発見されます。これらを全てまとめると、次の式で表せます。

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n' = 1, 2, 3 \dots \quad n = n' + 1, n' + 2, n' + 3 \dots$$

ここで R はリュードベリ定数と呼ばれ、 $1.10 \times 10^7 [\text{m}^{-1}]$ です。 $n' = 1$ がライマン系列、2がバルマー系列、3がパッシェン系列です。例えばバルマー系列の場合、 n' に2を入れて、 λ_1 の場合は n に3を入れて、電卓で計算をしてみよう。

$$\frac{1}{\lambda_1} = 1.10 \times 10^7 \times \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) \rightarrow \frac{1}{\lambda} = 1.10 \times 10^7 \times \frac{5}{36} \rightarrow \lambda = \frac{1}{0.1527 \times 10^7} = 6.55 \times 10^{-7} [\text{m}]$$

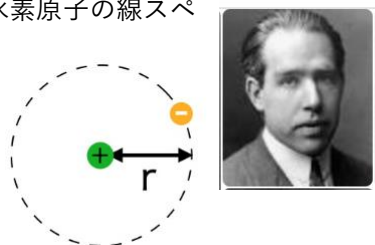
となります。観測結果①に近い結果となります。ライマン系列の λ_2 なら $n'=2, n=4$ を入れると、求めら

れます。数式で表せたということは、なにか原子の仕組みがここに潜んでいるはずです。

○ 水素原子のボーア模型

1913 年、ボーアはラザフォードの原子模型の **問題点 1** について、水素原子の線スペクトルに着目して仮説を発表しました。

まず電子はいくかの決められた円軌道にのみ存在しており、その起動にいるときには電磁波は出さないと仮定しました。そして、その円軌道の条件を以下の数式で示しました。

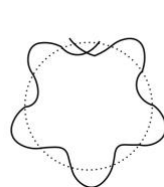


$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

これを（ **量子条件** ）といい、 n を量子数といいます。なぜこんな式で表せるのか？理解にこまる条件でしたが、物質波（電子波） $\lambda = \frac{h}{mv}$ を使うと、

$$2\pi r = \frac{nh}{mv} = n\lambda \quad \text{覚える}$$

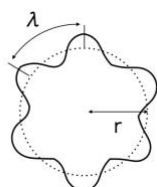
と表わせ、電子は電子波の波長の整数倍の起動でのみ、安定した状態を保つことができると解釈できます。この状態を電子の定常状態といいます。



スタートとゴールで
波長が合わない



この軌道は波が打ち消し合っ
て存在できない

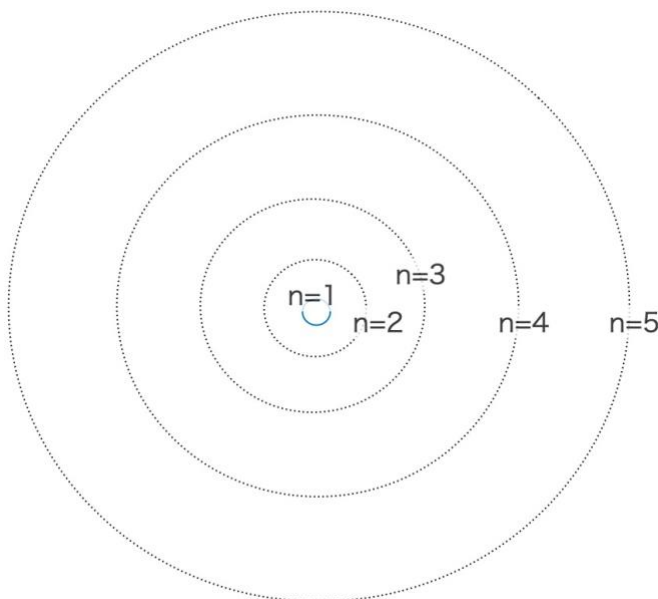


スタートとゴールで
波長が合う

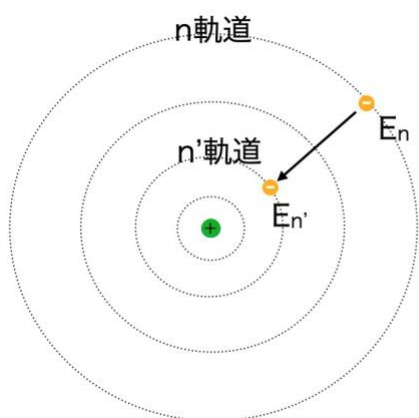


この軌道は存在できる

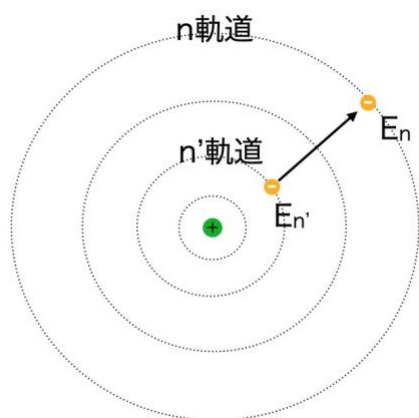
定常状態により軌道半径がとびとびの値となります。



このため、電子の持つエネルギーは連続量ではなく「とびとびの値」（離散的）になります。この値を（ **エネルギー準位** ）といいます。ボーアは電子が高いエネルギー準位 E_n から低いエネルギー準位 $E_{n'}$ へ移動するときに（これを（ **遷移** ）するという）、電子から 1 つの光子が放出されると仮定しました。次の式を振動数条件といいます。



遷移



励起

振動数条件 $E_n - E_{n'} = h\nu$

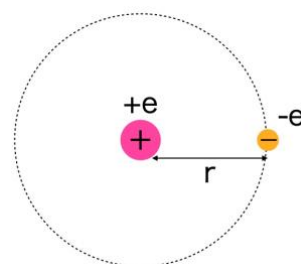
覚える

逆に電子に光（光子）を吸収させて低いエネルギー準位から高いエネルギーに移すこともできます（これを（**励起**）するといいます）。

○ 水素原子の軌道半径

量子条件から、水素原子における n 番目の電子の軌道半径 r_n を求めてみましょう。図のように、円運動する電子の運動方程式は、電子の質量を m 、電気量を $-e$ 、半径を r_n とすると、

$$m \frac{v^2}{r_n} = k \frac{e^2}{r_n^2} \quad (1)$$



量子条件より、

$$2\pi r_n = n\lambda = \frac{h}{mv} \quad (2)$$

①・②から v を消してみましょう。②より、

$$v = \frac{nh}{2\pi m r_n}$$

これを①に代入すると、

$$m \left(\frac{nh}{2\pi m r_n} \right)^2 = k \frac{e^2}{r_n}$$

$$\frac{mn^2 h^2}{4\pi^2 m^2 r_n} = k e^2$$

水素原子の軌道半径は、

$$r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 m k e^2} n^2 \quad \text{ただし } n = 1, 2, 3 \dots$$

この式からわかるように、 n が 1、2、3 と増えていくと、(軌道半径) も大きくなっていくことがわかります。また $n=1$ のときの半径 r_1 を (ボーア半径) といい、実際の水素原子の大きさとよく一致します。

○ 水素原子のエネルギー準位

電子が原子核から無限遠の位置を静電気力による位置エネルギーの基準 ($U=0$) とすると、半径 r_n の位置にある電子の持つ U は、

$$U = qV = e \left(-k \frac{e}{r_n} \right) = -k \frac{e^2}{r_n}$$

よって全エネルギー E は、

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \left(-k \frac{e^2}{r_n} \right) \quad \text{③}$$

また①を $m v^2$ について解くと、

$$m \frac{v^2}{r_n} = k \frac{e^2}{r_n^2} \quad \rightarrow \quad m v^2 = \frac{k e^2}{r_n}$$

これを③に代入すると、

$$E = \frac{1}{2} \frac{k e^2}{r_n} - k \frac{e^2}{r_n} = -\frac{k e^2}{2 r_n}$$

ここに上記の軌道半径 r_n を代入すると、

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m k^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

$n=1$ (内側) の軌道のエネルギー準位を (基底) 状態といいます。 $n=2, 3 \dots$ と増えるにつれて、電子の持つエネルギーは (大きく) なっていきます。これらの状態を (励起) 状態といいます。

○ ボーア模型の水素原子のスペクトル

振動数条件 ($E_n - E_{n'} = h\nu$) から、電子が n 番目の定常状態 E_n から、 n' 番目の定常状態 $E_{n'}$ へ移るときに放出される光の波長 λ は、

$$\begin{aligned} c &= h\nu \rightarrow \\ \frac{1}{\lambda} &= \frac{\nu}{c} = \frac{E_n - E_{n'}}{ch} \\ &= \frac{1}{ch} \left(\left(-\frac{2\pi^2 mk^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \right) - \left(-\frac{2\pi^2 mk^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n'^2} \right) \right) \\ &= \frac{2\pi^2 mk^2 e^4}{ch^3} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \\ (n' &= 1, 2, 3 \dots \quad n = n' + 1, n' + 2, n' + 3 \dots) \end{aligned}$$

この式とバルマー・ライマン・パッシェンの系列をまとめた式

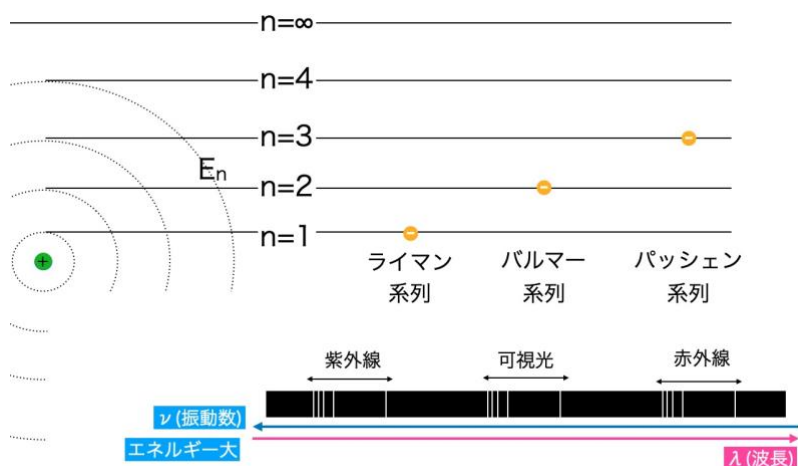
$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

を比較してみると、同じ形をしていることがわかります。またリュドベリ定数 ($1.10 \times 10^7 [\text{m}^{-1}]$) に当たる部分、 $\frac{2\pi^2 mke^4}{ch^3}$ を計算すると、

電卓で計算してみよう

$$R = \frac{2\pi^2 mk^2 e^4}{ch^3} = \frac{2 \times 3.14^2 \times 9.1 \times 10^{-31} \times (9.0 \times 10^9)^2 \times (1.6 \times 10^{-19})^4}{3.0 \times 10^8 \times (6.6 \times 10^{-34})^3} = 11044411.32$$

となり、観測結果と一致しました！これらのことから、水素原子のスペクトル線は高いエネルギー準位から低いエネルギー準位へ電子が遷移する際に出てくる光であることがわかりました。ボーアの仮説を用いることによって、水素原子のスペクトルに関する規則性を説明することができました。



参考 原子をイオンにするのに必要なエネルギーを電離エネルギーといい、水素原子をイオン化させるためには、基底状態にある電子を無限の彼方に励起させれば良いので、

$$E_{\infty} - E_1 = \frac{2\pi^2 m k^2 e^4}{h^2} = 13.6[eV]$$

となりますが、これは水素原子のイオン化エネルギーの実験値と一致します。

参考 ウランガラスと玉滴石（ぎょくてきせき）

ウランが微量に含まれている玉滴石に紫外線をあてると、緑色に光ります。これはウランの電子が紫外線により励起されて、もとの軌道に戻るときに出る緑色の光で、光るので食器（ウランガラス）などにも使われていました。



<https://youtu.be/oK9NsyNmeFI>