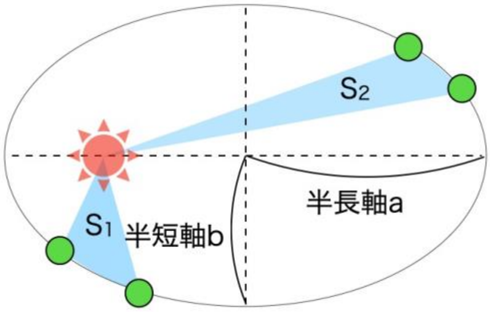
○　「ケプラーの法則」と楕円運動

単元のはじめにケプラーの法則について紹介しました。

第一法則：惑星は、太陽を１つの焦点とする楕円軌道上を公転運動する。

第二法則　面積速度一定の法則

：単位時間あたりに惑星と太陽とを結ぶ線分が描く面積は一定である（$S_1=S_2$）。（太陽の近くを通るときは､速くなる。）

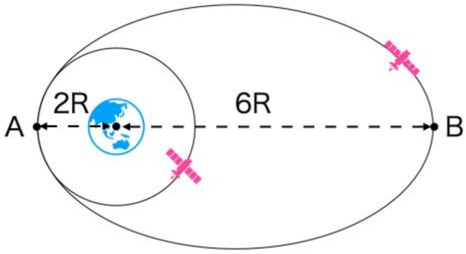


第三法則：惑星の公転周期 T の２乗は、軌道の長軸半径 a の３乗に比例する（$T^2=ka^3$）。なお k は定数。

楕円運動を扱う問題には、ケプラーの第２・３法則を使って考えるものもあります。またケプラーの第三法則の定数 k は焦点である天体が同じであれば、同じ値です。例えば太陽系は太陽が焦点の１つになっているので、さまざまな惑星で k の値は一定です。

$$\left(\quad \frac{T_1^2}{a_1^3}=\frac{T_2^2}{a_2^3} \quad\right)$$

問題　地球の半径を R，地球上での重力加速度の大きさを g とする。次の図のように円軌道を描いて回る質量 m の人工衛星がある。次の各問に答えなさい。



(1) 人工衛星の速さ v_0 を求めよ。

(2) 人工衛星の周期 T_0 を求めよ。

点 A で人工衛星を加速して速さを v_1 にすると、図のような楕円起動になった。A 点の反対側の B 点での速度を v_2 とする。

(3) 点 A および点 B について力学的エネルギー保存則を表す式を立てなさい。なおこの問題については、万有引力定数 G を用いてもかまわない。

(4) ケプラーの第２法則を用いて、v_2 を v_1 しなさい。

(5) v_1 を求めなさい。

(6) ケプラーの第３法則を用いて、このだ円軌道を回る人工衛星の周期 T を求めなさい。

(1)　円運動の運動方程式より､$m\frac{v_0^2}{2R}=G\frac{Mm}{(2R)^2}$　また地球上での重力＝万有引力の関係から､$mg=G\frac{Mm}{R^2}$

これらから、$v_2=\sqrt{\frac{1}{2}gR}$

(2)　円運動の周期の式より

$$T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi\cdot 2R}{v_0}=4\pi\sqrt{\frac{2R}{g}}$$

(3)　力学的エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\left(-G\frac{Mm}{2R}\right)=\frac{1}{2}mv_2^2+\left(-G\frac{Mm}{6R}\right)$$

(4)　面積速度一定の法則より、$\frac{1}{2}\times 2R\times v_1=\frac{1}{2}\times 6R\times v_2$

$$v_2=\frac{1}{2}v_1$$

(5)　(3)式より、

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_2^2=\left(-G\frac{Mm}{6R}\right)+G\frac{Mm}{2R}=\frac{GMm}{3R}=\frac{mgR}{3}$$

(4)式より、

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{1}{3}v_1\right)^2=\frac{mgR}{3}\qquad v_1=\frac{1}{2}\sqrt{3gR}$$

(6)　ケプラーの第３法則より、

$$\frac{T_0^2}{(2R)^2}=\frac{T^2}{(4R)^2}\qquad T^2=8T_0^2$$

$$T=2\sqrt{2}T_0=16\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$