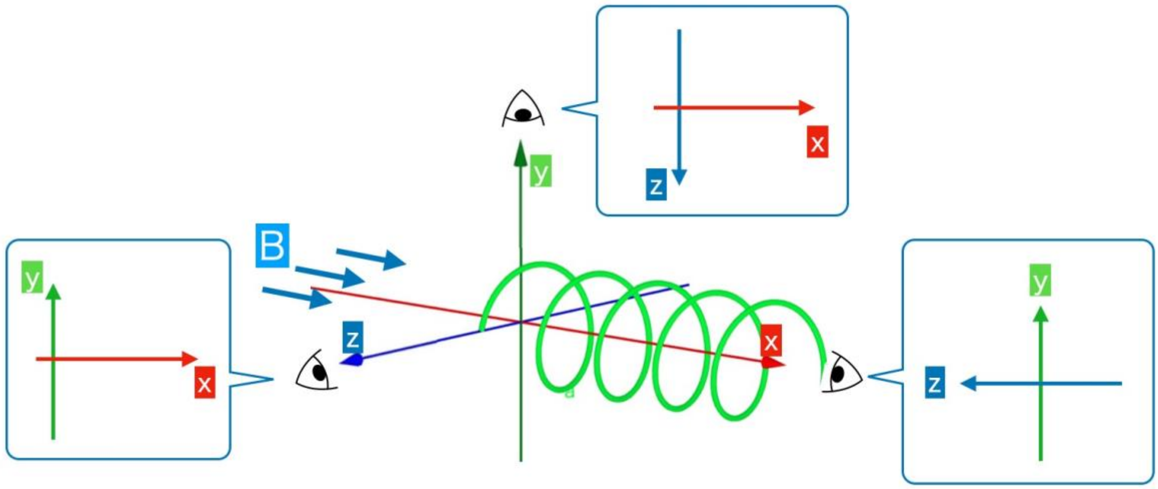
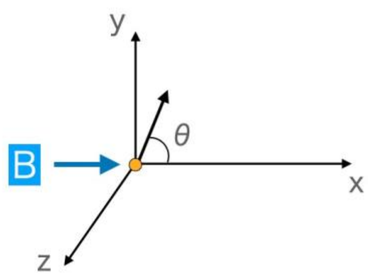
○　螺旋運動（らせん運動）



https://www.geogebra.org/3d/wqgbeya8

磁場に対して斜めに荷電粒子が入射すると、磁力線に（　巻きつく　）らせん運動（螺旋運動）をします。オーロラはこの螺旋運動と関係があります。太陽から出た荷電粒子からなるガス（太陽風）が地球の磁気圏に入ると、磁力線にそって運動をして高緯度に運ばれます。この荷電粒子が大気の分子に衝突して発光します。

問題　次の図のように、原点 O に速さ v_0 で，xy 平面内で x 軸と角 θ（$0° < \theta < 90°$）をなす方向に，電子(質量 m，電荷－e)を入射させた。この時刻を 0 秒とする。この空間には磁束密度 B が x 軸の正の向きにある。次の各問に答えなさい。



(1)　y-z 平面内では円運動をします。その円運動の中心座標(y,z)と、半径 r を求めなさい。

(2) ある時刻 t の粒子の位置について、x 方向については、$x=v_0\cos\theta\times t$ と表すことができます。同じように y について、粒子の位置の式を作りなさい。また x と y の式から t を消去することで、y-x 平面内での y と x の関係を表す式を作りなさい。

(3) 粒子がスタートしてから x 軸上に 2 回目に達したときの、 x 座標を求めなさい。

(1)　この粒子はx軸方向に $v_0\cos\theta$、y方向に $v_0\sin\theta$ の初速度があり、 y方向の初速度に対してローレンツ力がはたらく。ローレンツ力の大きさは $f=qvB=e(v_0\sin\theta)B$ となり、z軸正の方向を向く。この力が向心力となり円運動をする。その半径をrとすると、

$$m\frac{(v_0 sin\theta)^2}{r} = e(v_0 sin\theta)B \qquad \rightarrow \qquad r = \frac{mv_0 sin\theta}{eB}$$

その中心座標は$(y,z)=(0, \frac{mv_0 sin\theta}{eB})$となる。

(2)　y方向は等速円運動の射影なので、$y = rsin\omega t$と表すことができる。また等速円運動の周期は、

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v_0 sin\theta} \times \frac{mv_0 sin\theta}{eB} = \frac{2\pi m}{eB}$$

角速度ωは、

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{m}$$

よって、$y = rsin\omega t = \frac{mv_0 sin\theta}{eB} sin\frac{eB}{m}t$　となる。

また$x = v_0 sin\theta \times t$より、$t = \frac{x}{v_0 sin\theta}$を代入すると、

$$y = \frac{mv_0 sin\theta}{eB} sin\frac{eB}{m}\frac{x}{v_0 sin\theta} = \frac{mv_0 sin\theta}{eB} sin\frac{eB}{mv_0 sin\theta}x$$

となり、y-x平面内ではsin関数で軌跡を描くことがわかる。

(3)　1周まわると再びx軸に到達する。2回目ということでt=2Tであることがわかる。x軸方向には等速直線運動をしているので、

$$x = v_0 sin\theta \times 2T = \frac{4\pi m}{eB}v_0 sin\theta$$