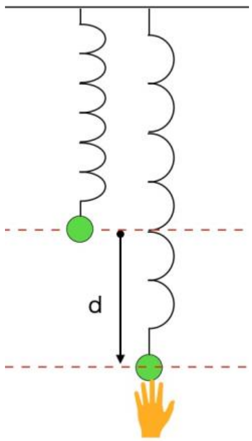
問題　ばね定数 k の軽いばね A の上端を天井の点 P に固定し，下端に質量 m の小球 B をとりつけた。図のように，B をつりあいの位置から d だけ引き下げて静かにはなすと，B は鉛直方向に単振動をした。重力加速度の大きさを g として，次の各問に答えよ。



(1)　B の単振動の周期はいくらか。k，m を用いて表せ。

(2)　B の速さの最大値はいくらか。d，k，m を用いて表せ。復元力による位置 E を使って、力学的エネルギーの保存を用いて求めなさい。

(3)　(2)について、自然長の位置を基準にして変位を考えて、重力による位置 E と弾性力による位置 E を使って、力学的エネルギーの保存で B の速さの最大値を求めなさい。

(1)　周期の式より　$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(2)　鉛直ばね振り子は、力のつり合う位置で速度が最大になる。力のつり合う位置を基準にして、鉛直下向きにＸ軸を作る。復元力による位置エネルギーを使って力学的エネルギーの保存を考えると、

$$\frac{1}{2}\mathrm{kd}^2=\frac{1}{2}\mathrm{mv}_{max}^2$$

復元力による位置Ｅ＝運動Ｅ

ここで重力による位置エネルギーはいれません。復元力による位置エネルギー$(\frac{1}{2}kd^2)$の中に弾性Ｅとともに入っているためです。これを v_{max} について解くと、

$$\mathrm{v}_{max}=\mathrm{d}\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$$

(3)　自然長を基準にして、鉛直下向きにｘ軸を作る。力学的エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}\mathrm{k}(\mathrm{x}_0+\mathrm{d})^2-\mathrm{mg}(\mathrm{x}_0+\mathrm{d})=\frac{1}{2}\mathrm{kx}_0^2-\mathrm{mgx}_0+\frac{1}{2}\mathrm{mv}_{max}^2 \quad ①$$

弾性力による位置Ｅ＋重力による位置Ｅ＝弾性力による位置Ｅ＋重力による位置Ｅ＋運動Ｅ

また力のつり合いから、

$$\mathrm{kx}_0=\mathrm{mg} \quad ②$$

①より、

$$\frac{1}{2}\mathrm{k}(\mathrm{x}_0^2+2\mathrm{x}_0\mathrm{d}+\mathrm{d}^2)-\mathrm{mgx}_0-\mathrm{mgd}=\frac{1}{2}\mathrm{kx}_0^2-\mathrm{mgx}_0+\frac{1}{2}\mathrm{mv}_{max}^2$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{kx}_0^2+\mathrm{kx}_0\mathrm{d}+\frac{1}{2}\mathrm{kd}^2-\mathrm{mgd}=\frac{1}{2}\mathrm{kx}_0^2+\frac{1}{2}\mathrm{mv}_{max}^2$$

$$\mathrm{kx}_0\mathrm{d}+\frac{1}{2}\mathrm{kd}^2-\mathrm{mgd}=\frac{1}{2}\mathrm{mv}_{max}^2$$

②より、$\mathrm{x}_0=\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{k}}$を代入すると、

$$\frac{1}{2}\mathrm{kd}^2=\frac{1}{2}\mathrm{mv}_{max}^2$$

$$\mathrm{v}_{max}=\mathrm{d}\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$$

同じ答えが導かれましたが、復元力による位置エネルギーを使った解き方のほうが楽ですね。