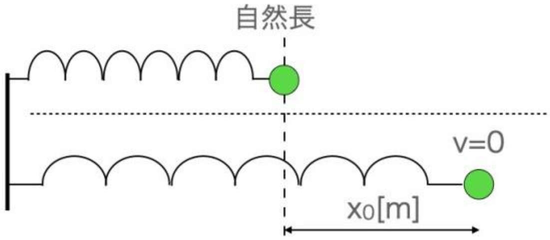
問題　ばね定数 k のばねをなめらかな水平面上に置いて、図のように質量 m の小球をとりつける。ばねが自然の長さから x_0 伸ばして静かにはなすと，小球は単振動した。なお(3)(4)については、単振動を円運動の射影とする解き方と、エネルギーや運動方程式をつかって解く方法との２種類で解きなさい。



(1) 振幅 A　(2) 周期 T　(3) 小球の速さの最大値 v_{max}

(4) 小球にはたらく力の大きさの最大値 F_{max}

解答・解説

r=x_0の円運動を想像しながら解きましょう。

(1)(2)　振幅 A は x_0であり、周期 T は単振動の公式より、$T=2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}}$となります。

(3)　v=rωの影がきれいにうつる位置（振動中心）で速度が最大になる。等速円運動の速度の式$v=r\omega$、ωと T の関係式$\omega=\frac{2\pi}{T}$、単振動の周期の式$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$より、

$$v=r\omega=x_0\omega=x_0\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi x_0}{2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}}}=x_0\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}$$

(4)　F=ma より、加速度 a の最大値を求めてみよう。円運動の加速度の式$a=r\omega^2$の影がきれいにうつるのは、振動の両端である。よって、

$$a=x_0\omega^2=x_0\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{x_0 4\pi^2}{T^2}=\frac{x_0 4\pi^2}{\left(2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}}\right)^2}=\frac{kx_0}{m}$$

運動方程式に代入すると、

$$F_{max}=ma_{max}=kx_0$$

(3)の別解　力学的エネルギーの保存より、

$$\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}mv_{max}^2$$

(4)の別解　バネが最大に伸びた時（縮んだ時）力が最大になるので、

$$F=kx_0$$

単振動は実は円運動を意識しなくても解くことができるものもあります。どちらも知っておくと良いでしょう。